Cinématique

La cinématique est l'étude des mouvements d’un système sans considération sur leurs origines.

1- Le système

Système :

Ensemble des éléments dont on veut étudier le mouvement. Cela peut être un atome, une molécule, le système solaire, un avion, un skieur etc.

Les lois et théorèmes utilisés dépendent du type de système étudié.

Un système peut être :

Fermé ou isolé :

Sans interaction aucune avec l’univers environnant.

Ouvert ou en interaction :

Qui interagi avec d’autres système. Cela devient alors un sous système en interaction dans un système plus complexe.

Dans toute la partie mécanique du programme (que cela soit précisé ou non dans les exercices) nous considérerons par défaut les systèmes comme des solides ponctuels, indéformables et homogènes, même le traditionnel skieur.

Solide indéformable :

Système dont la distance entre deux points quelconques est constante.

Solide homogène :

Solide dont le centre des masses coïncide avec le barycentre des points matériels.

Solide ponctuel

Solide indéformable et homogène qui sera modélisé par un point affecté de la masse du solide. Ses dimensions sont petites par rapport aux dimensions du problème. Par exemple la Terre peut être considérée comme ponctuelle dans son mouvement de rotation autour du soleil.

La description d'un mouvement nécessite de repérer :

- La position d'un point dans l'espace (repère d'espace),
- Les événements dans le temps (repère du temps)

2- Les référentiels

Le mouvement d'un point M ne peut être décrit que par rapport à un solide de référence. Par exemple, un passager est immobile par rapport au train dans lequel il est assis mais en mouvement par rapport à la gare de départ.
Décrire le mouvement d'un point M nécessite de déterminer la position de ce dernier par rapport au solide de référence et ce à chaque instant. Cela implique donc :

- De savoir repérer un point M dans l'espace (ex: le train est en gare de Toulouse),
- De savoir repérer dans le temps un événement (ex: le train entre en gare de Toulouse à 12h32).

Cela conduit à définir :

- Un repère d'espace pour positionner le point M,
- Un repère des temps permettant de situer une succession d'événements dans le temps.

L'association de ces deux repères défini un référentiel

Référentiel :

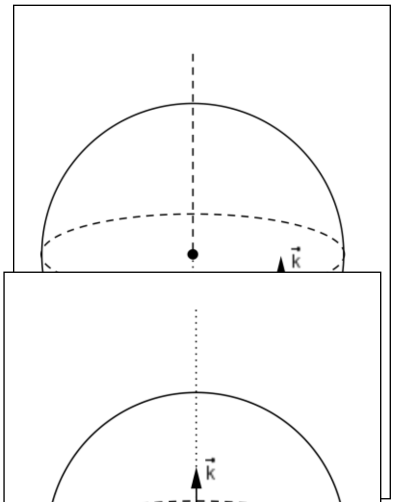
> Système de coordonnées utilisé pour décrire la position et le mouvement des objets. Il est constitué de trois éléments principaux :
>
> - Un point d'origine : un point fixe à partir duquel les positions sont mesurées.
> - Un système d'axes : généralement trois axes perpendiculaires (x, y, z) qui définissent la direction dans l'espace.
> - Un repère temporel : un moyen de mesurer le temps, permettant de suivre l'évolution des positions et des mouvements au fil du temps.

Nous étudierons 3 référentiels en fonction du type de mouvement à étudier.

2.1. Référentiel terrestre

C'est le référentiel du laboratoire. Il permet d'étudier tous les mouvements «standards» sur Terre, c'est à dire sur des faibles durée et distances.

Il est matérialisé par un point fixe de la Terre (l'origine O par exemple l'angle du laboratoire dans lequel se déroule l'expérience) qui tourne avec elle. On lui associe un repère d'espace$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$



2.2. Référentiel géocentrique

Il permet d'étudier les mouvements des satellites de la Terre.

Il est matérialisé par le centre de la Terre. On lui associe un repère d'espace$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$dont les vecteurs pointent vers trois étoiles fixes. Il est donc indépendant du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

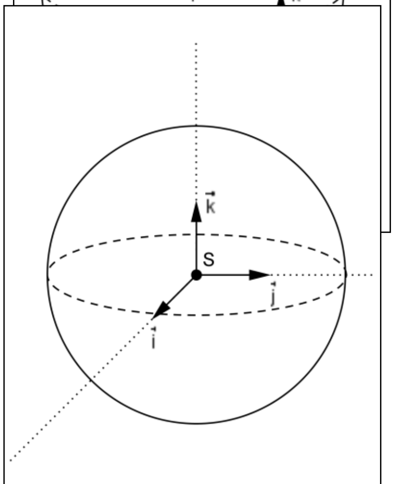


Fig. 2: Référentiel géocentrique

2.3. Référentiel héliocentrique ou de Copernic

Il permet d'étudier les mouvements dans le système solaire.

Il est matérialisé par le centre du soleil. On lui associe un repère d'espace$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$dont les vecteurs pointent vers trois étoiles fixes.

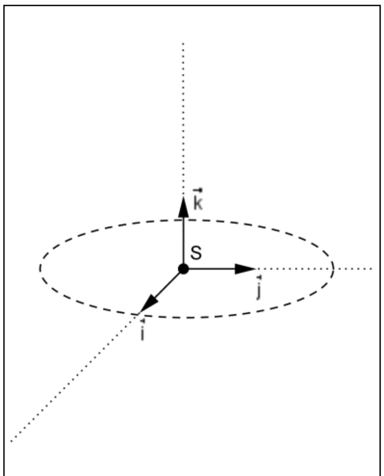


Fig. 3: Référentiel Héliocentrique

3- Repère d'espace et de temps

3.1. Repère d'espace

Repère d'espace :

> Système de coordonnées spatiales permettant de repérer un point dans l'espace par rapport à un point fixe l'origine O.

Les distances sont mesurées en mètre (m) dans le SI.

Nous en utiliserons deux, les coordonnées cartésiennes et curviligne.

On définit la position du point M à l'instant t dans le repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$par le vecteur position$\overrightarrow{OM}_{(t)}$ aussi appelé rayon vecteur :

$$\overrightarrow{OM}_{(t)} = x_{(t)}\vec{\imath} + y_{(t)}\vec{\jmath} + z_{(t)}\vec{k} \text{ où } \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = f_{(t)} \\ y = g_{(t)} \\ z = h_{(t)} \end{array} \right.$$

Les fonctions $x=f_{(t)}$, $y=g_{(t)}$ et $z=h_{(t)}$ sont appelées équations horaires du mouvement ou équations paramétriques.

Remarques :

- *Les variables* $x_{(t)}$, $y_{(t)}$ *et* $z_{(t)}$ *sont des variables algébriques qui peuvent être positives ou négatives,*

- *La position du point* M *peut être repérée indépendamment de la connaissance de la trajectoire.*

La norme du vecteur position est définie par :

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x_{(t)}^2 + y_{(t)}^2 + z_{(t)}^2}$$

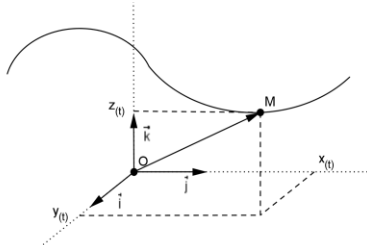


Fig. 4: Vecteur position

3.2. Repère des temps

Repère des temps :

> Il est déterminé par un instant origine t_0 appelé origine des temps. On définira la date t comme l'intervalle de temps entre l'instant origine t_0 et l'instant de la date t.

Les dates t sont mesurées en seconde (s) dans le SI.

Le repère des temps permet :

- De repérer les évènements dans le temps.
- De repérer l'instant ou la date t correspondant à chaque position du point M tout au long de son déplacement,
- De mesurer la durée entre deux événements ou deux positions du point M,

Remarques :

- *Il est indépendant du repère d'espace.*
- *En mécanique classique le temps est universel, il est donc unique quel que soit le mouvement étudié.*

4- Trajectoire, vitesse et accélération

Trajectoire, vitesse et accélération dépendent du référentiel choisi.

4.1. Trajectoire ou Équation cartésienne

Trajectoire :

> La trajectoire d'un solide est l'ensemble des positions $M_{(t)}$ occupées par ce solide successivement au cours du temps.

Elle dépend des positions du point M donc du référentiel. C'est une équation du type $y=f_{(x)}$ obtenue en éliminant le paramètre temps dans les équations horaires.

Le mouvement est rectiligne si sa trajectoire a pour équation celle d'une droite :

$$y = ax + b$$

Le mouvement est circulaire si sa trajectoire a pour équation celle d'un cercle de rayon r:

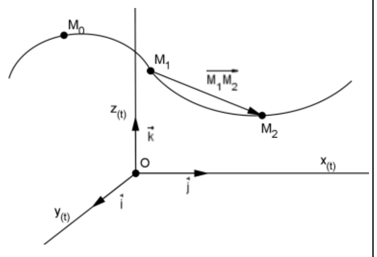


Fig. 5: Vitesse dans un référentiel

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Le mouvement est parabolique si sa trajectoire a pour équation celle d'une parabole :

$$y_{(x)} = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

4.2. Vitesse dans un référentiel

Soit un point M à la position M_1 à la date t_1 et à la position M_2 à la date t_2. Le point M parcourt donc l'arc M_1M_2 durant l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$.

a) Vitesse moyenne

- Coordonnées cartésiennes :

On définit le vecteur vitesse moyenne entre la date t_1 et la date t_2 par :

$$\vec{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

Remarque :

- *Ce n'est pas cette vitesse moyenne qui est utilisée lors des voyages en train ou en voiture,*
- *La vitesse moyenne est constante sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.*

- Coordonnées curvilignes

On définit la vitesse moyenne $\bar{v}$ entre la date t_1 et la date t_2 par :

$$\bar{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{M_1M_2}{t_2 - t_1}$$

M_1M_2 représente la valeur algébrique de l'arc M_1M_2.

Remarques :

- *Si le sens positif choisi pour l'orientation de la trajectoire et le même que le sens du mouvement alors* s *augmente et la vitesse est positive* $\bar{v} = +|\bar{v}|$
- *Si le sens positif choisi pour l'orientation de la trajectoire et le sens du mouvement sont opposés alors* s *diminue et la vitesse est négative* $\bar{v} = -|\bar{v}|$
- $|\bar{v}|$ *représente la vitesse moyenne des voyages en train ou en voiture. Elle prend en compte les dénivelés de la route ou des rails.*

b) Vitesse instantanée

- Coordonnées cartésiennes :

Soit le vecteur vitesse moyenne :

$$\vec{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\overrightarrow{M_0M_2} - \overrightarrow{M_0M_1}}{t_2 - t_1}$$

La vitesse du point M à l'instant t et noté $v_{(t)}$ est définie par :

$$lim \;\; \frac{\overrightarrow{M_0M_2} - \overrightarrow{M_0M_1}}{t_2 - t_1}$$

Le vecteur vitesse est donc la dérivée première du vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{v}_{(t)} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}_{(t)} \quad (2)$$

ou $\overrightarrow{OM}_{(t)}$est le vecteur position du point M.

$$\vec{v}_t \left| \begin{array}{l} v_x = \dfrac{d}{dt}x_{(t)} \\ v_y = \dfrac{d}{dt}y_{(t)} \\ v_z = \dfrac{d}{dt}z_{(t)} \end{array} \right.$$

le vecteur vitesse appliqué au point M a pour caractéristiques :

$\vec{v}_{(t)}$
- Direction : la tangente à la trajectoire au point M
- Sens : celui du mouvement
- Norme :$\left\|\vec{v}_{(t)}\right\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$

4.3. Accélération dans un référentiel

a) Accélération moyenne

L'accélération permet de caractériser les variations de vitesse :

- Lorsque la vitesse augmente au cours du temps l'accélération est positive, c'est à dire du même sens que le mouvement et la vitesse,
- Lorsque la vitesse diminue au cours du temps l'accélération est

négative, c'est à dire de sens opposée au mouvement et à la vitesse.

Lorsqu'un point passe de la position M_1 à la date t_1 animé d'un vecteur vitesse $\vec{v}_1$ à la position M_2 à la date t_2 animé d'un vecteur vitesse $\vec{v}_2$ alors on définit le vecteur accélération moyenne entre t_1 et t_2 par :

$$\vec{a}_{t_1 \to t_2} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Remarque :

Le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.

b) Accélération instantanée dans un repère cartésien

On définit le vecteur accélération au point M par le vecteur :

$$lim \ \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Le vecteur accélération est donc la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a}_{(t)} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{(t)} \quad (3)$$

où :

$$\vec{a}_{(t)} \begin{cases} a_x = \frac{d}{dt} v_x \\ a_y = \frac{d}{dt} v_y \\ a_z = \frac{d}{dt} v_z \end{cases}$$

Or, d'après la définition du vecteur vitesse établie au paragraphe 0 page 6 :

$$\vec{v}_{(t)} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}_{(t)}$$

on obtient donc en reportant dans (3) :

$$\vec{a}_{(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}_{(t)}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}_{(t)}$$

On en déduit donc :

$$\vec{a}_{(t)} = \frac{d^2}{dt^2}x_{(t)}\vec{\imath} + \frac{d^2}{dt^2}y_{(t)}\vec{\jmath} + \frac{d^2}{dt^2}z_{(t)}\vec{k} \text{ où } \vec{a}_{(t)} \begin{cases} a_x = \frac{d^2}{dt^2}x_t = \ddot{x}_{(t)} \\ a_y = \frac{d^2}{dt^2}y_t = \ddot{y}_{(t)} \\ a_z = \frac{d^2}{dt^2}z_t = \ddot{z}_{(t)} \end{cases}$$

Remarques :

- a_x, a_y *et* a_z *sont des grandeurs algébriques qui peuvent être positives ou négatives,*
- *On remplacera par soucis de simplification d'écriture l'expression* $\frac{d^2}{dt^2}x$ *par l'expression* $\ddot{x}$

La norme du vecteur accélération s'écrit donc :

$$\|\vec{a}_{(t)}\| = \sqrt{\ddot{x}^2{}_{(t)} + \ddot{y}^2{}_{(t)} + \ddot{z}^2{}_{(t)}}$$

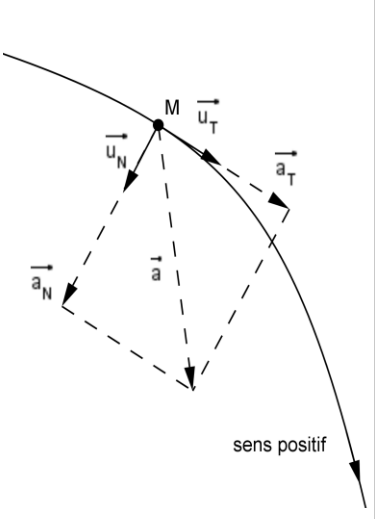


Fig. 6: Base de Frenet

5- Étude des différents mouvements

Pour déterminer la nature d'un mouvement il faut connaître :

- Sa trajectoire : elle peut être rectiligne, circulaire, parabolique ou quelconque. Pour cela on établira l'équation cartésienne de la trajectoire (cf paragraphe 4.1.). La forme de cette équation renseignera sur la nature de la trajectoire.
- Son accélération : elle peut être nulle (mouvement rectiligne uniforme), constante vectoriellement (mouvement parabolique, mouvement rectiligne uniformément varié), constante en norme (mouvement circulaire uniforme) ou variable vectoriellement (mouvement circulaire, mouvement rectiligne sinusoïdal). L'accélération est déterminée par l'étude de la 2ième loi de Newton

5.1. Phase d'un mouvement : retardée ou accélérée

Phase accélérée :

> Un mouvement est dit accéléré si la norme du vecteur vitesse croit au cours du temps.

Phase retardée :

> Un mouvement est dit retardé (ou ralenti) si la norme du vecteur vitesse diminue au cours du temps.

Attention :

Le signe de la vitesse ne renseigne nullement sur la phase du mouvement (accélérée ou retardée) mais montre si le le sens du déplacement du solide est le même que celui choisi pour l'orientation de la trajectoire ($v > 0$) ou opposé ($v < 0$)

Pour déterminer la phase du mouvement il faut étudier soit le signe de a_T (cf paragraphe **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**), soit le signe du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$.

Il y a trois cas qui dépendent du signe de $\vec{a} \cdot \vec{v}$:

a) si le produit scalaire est positif

On a :

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\|) > 0$$

cela implique que :

$$\cos(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\|) > 0$$

et donc :

$$0 < \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\| < \frac{\pi}{2}$$

Si le mouvement est accéléré, la norme du vecteur vitesse croît au cours du temps, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ et $a_T > 0$.

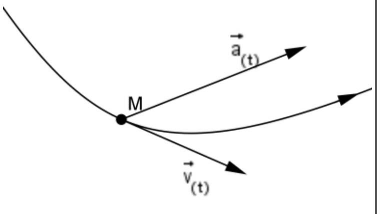


Fig. 7: Phase accélérée.

b) Si le produit scalaire est négatif

On a :

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\|) < 0$$

cela implique que :

$$\cos(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\|) < 0$$

et donc :

$$\frac{\pi}{2} < \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\| < \pi$$

Si le mouvement est retardé, la norme du vecteur vitesse décroît au cours du temps, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ et $a_T < 0$.

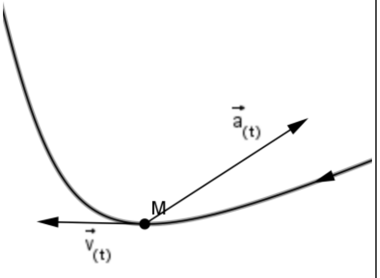


Fig. 8: Phase retardée

c) Si le produit scalaire est nul

Si :

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{v}\|) = 0$$

alors il y a quatre cas possibles :

- $\vec{a} = \vec{0}$et$\vec{v} = \vec{0}$

le solide sera immobile quelque soit l'instant t.

- $\vec{a} = \vec{0}; \vec{v} = \overrightarrow{cte} \neq \vec{0} \forall t$

Le mouvement sera rectiligne uniforme quel que soit l'instant t.

- $\vec{v} = \vec{0}; \vec{a} = \overrightarrow{cte} \neq \vec{0} \forall t$

C'est un point d'arrêt (ou point de départ) d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (cf paragraphe 0)

- $\vec{v} \neq \vec{0}; \vec{a} \neq \vec{0}; \vec{a}\vec{v} = \frac{\pi}{2} \forall t$

Les vecteurs accélération et vitesse sont alors perpendiculaires.

5.2. Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)

a) Définition

Un point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme si :

$\vec{a} = \vec{a}_N \perp \vec{v} \forall t \Rightarrow$	Les deux vecteurs$\vec{a}$et$\vec{v}$sont perpendiculaires et sont dans un même plan. La trajectoire est donc plane.
$a = a_N = cte$	L'accélération est uniquement normale.

D'après la définition on a:

$$a = a_N \Rightarrow a_T = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} v = 0 \Rightarrow v = v_0 = cte$$

Remarque :

La norme de la vitesse est constante, mais pas le vecteur vitesse dont la direction change au cours du temps.

De plus :

$$\left. \begin{array}{r} a_N = cte = \dfrac{v^2}{\rho} \\ v = v_0 = cte \end{array} \right| \Rightarrow \rho = cte = r$$

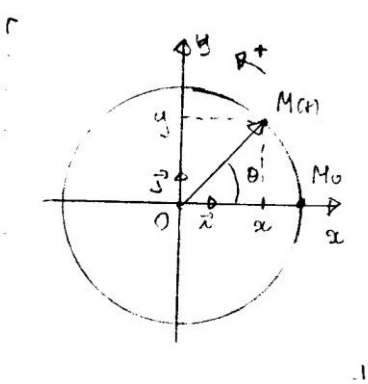


Fig. 9: Mouvement circulaire

La trajectoire est plane et de rayon de courbure constant égal à r. C'est donc un cercle de rayon r.

Remarque :

La norme du vecteur accélération est constante mais pas le vecteur accélération dont la direction change au cours du temps.

Dans un mouvement circulaire uniforme la norme du vecteur accélération est constante et est égale à :

$$\|\vec{a}_N\| = \frac{v^2{}_0}{r}$$

a.1. Position de M sur le cercle : abscisse curviligne et abscisse angulaire

L'utilisation des coordonnées cartésiennes comme base de projection pour l'étude d'un mouvement circulaire n'est pas appropriée même si elle reste toujours possible.

On préférera repérer le point M par :

- Son abscisse angulaire θ (Fig 14) θ est un angle orienté.

$$\theta = M_0OM$$

- Son abscisse curviligne $\bar{s}$ qui représente l'arc de cercle compris entre M_0 et M.

Ces deux systèmes de repérage du point sont relié par la relation :

$$\bar{s} = r\theta$$

Remarque :

La relation précédente montre que l'orientation de θ est la même que l'orientation de $\bar{s}$ c'est à dire celle du sens positif choisi pour la trajectoire.

Il est donc possible de travailler dans l'un où l'autre des systèmes de positionnement. Le plus pratique et par conséquent le plus utilisé est l'abscisse angulaire.

Position :	$\bar{s}$	θ	$\bar{s} = r\theta$
Vitesse :	$v_s = \dot{s} = \frac{d}{dt}\bar{s}$	$\omega = \theta = \frac{d}{dt}\theta$	$v_s = r\omega$
Accélération :	$a_T = \ddot{s} = \frac{d^2}{dt^2}\bar{s} =$ $a_N = \frac{v^2{}_s}{r}$	$\omega = \theta = \frac{d^2}{dt^2}\theta$ $= 0$	$a_T = r\omega = 0$ $a_N = r\omega^2$

Dans un mouvement circulaire uniforme :

La norme de la vitesse s'exprime par la relation $v = r\omega$

La norme de l'accélération s'exprime par la relation $a = r\omega^2$

2

Équations horaires

Par intégrations successives on obtient :

Accélération :	$a_T = \frac{d}{dt} v_s = 0$	$\omega = \theta = \frac{a_T}{r} = 0$
Vitesse :	$v = cte = v_0$	$\omega = \theta = \frac{v_0}{r} = \omega_0$
Position :	$s = v_0 t + s_0$	$\theta = \omega_0 t + \theta_0$ (4)

Avec s_0, θ_0, v_0 et ω_0 les conditions initiales à $t = 0$.

Les équations horaires dans un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont :

$$\overrightarrow{0M}_{(t)} \left| \begin{array}{l} x_{(t)} = r\cos(\theta) = r\cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ y_{(t)} = r\sin(\theta) = r\sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\vec{v}_{(t)} \left| \begin{array}{l} \dot{x}_{(t)} = r\frac{d}{dt}\cos(\theta) = -r\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \\ \dot{y}_{(t)} = r\frac{d}{dt}\sin(\theta) = r\omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_{(t)} \left| \begin{array}{l} \ddot{x}_{(t)} = r\frac{d^2}{dt^2}\cos(\theta) = -r{\omega_0}^2 \cos(\omega_0 t + \theta_0) = -{\omega_0}^2 x_{(t)} \\ \ddot{y}_{(t)} = r\frac{d^2}{dt^2}\sin(\theta) = -r{\omega_0}^2 \sin(\omega_0 t + \theta_0) = -{\omega_0}^2 y_{(t)} \end{array} \right.$$

Remarques :

- *Le vecteur vitesse a tourné de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le sens trigonométrique direct. Le vecteur vitesse sera donc perpendiculaire au vecteur position.*
- *On dit que $\vec{v}$ est en quadrature avance par rapport à $\overrightarrow{OM}$*

Finalement on a :

$$\vec{a} = -{\omega_0}^2\, \overrightarrow{OM}_{(t)} \quad (6)$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est à tout moment radial centripète et sa norme est constante.

b) Trajectoire

De l'équation 4 on peut déduire :

$$\left|\begin{array}{l} x_{(t)}^2 = r^2\cos^2(\omega_0 t + \theta_0) \\ y_{(t)}^2 = r^2\sin^2(\omega_0 t + \theta_0) \end{array}\right.$$

d'où :

$$x^2 + y^2 = r^2[\cos^2(\omega_0 t + \theta_0) + \sin^2(\omega_0 t + \theta_0)]$$

or :

$$\cos^2(\omega_0 t + \theta_0) + \sin^2(\omega_0 t + \theta_0) = 1$$

d'où :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

C'est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon r.

c) Période, fréquence et vitesse angulaire

Période :

> La période est le temps nécessaire au point M pour faire un tour.
>
> On la note T. Elle a la dimension d'un temps et s'exprime en seconde (s) dans le SI.

Fréquence :

> La fréquence est le nombre de tour effectué par le point M en une seconde.

On la note f ou N. C'est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

> Elle à la dimension de l'inverse d'un temps et son unité est le Hertz (Hz) dans le SI. On peut aussi l'exprimer en (s^{-1})

Vitesse angulaire :

> La vitesse angulaire est l'angle balayé par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ pendant une seconde.
>
> On la note ω. Elle s'exprime en rad.s^{-1}

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

5.3. Les mouvements rectilignes

a) Généralités

Ils sont caractérisés par une trajectoire rectiligne. Leur équation est donc celle d'une droite et a_N est nulle

Dans un repère$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$on positionnera la droite sur l'axe des x. soit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}x\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM} = \frac{d^2}{dt^2}x\vec{i}$$

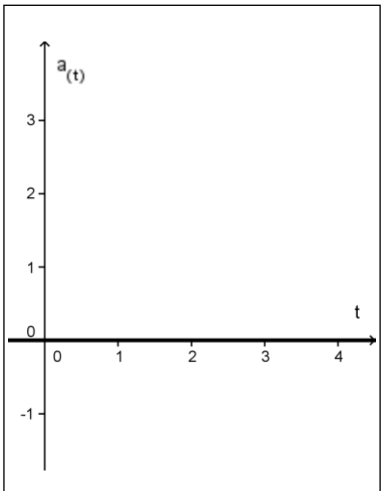


Fig. 11: Diagrammes a(t)

Dans un mouvement rectiligne, le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération sont parallèles à la trajectoire.

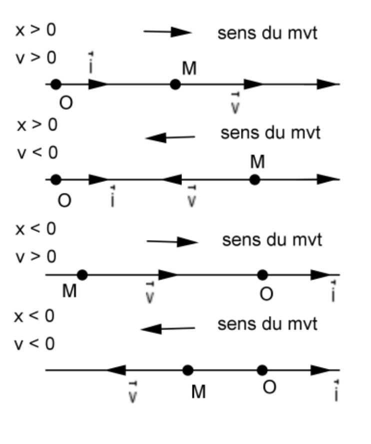


Fig. 10: Trajectoire rectiligne

Remarques :

Si les vecteurs sont colinéaires, ils ne sont pas forcément de même sens :

- *si* $\overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{i}$ *sont de même sens alors* $x = \bar{x} = +x > 0$ *et le point* M *se situe sur la demie droite des* x *positifs,*
- *si* $\overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{i}$ *sont de sens opposés alors* $x = \bar{x} = -x < 0$ *et le point* M *se situe sur la demie droite des* x *négatifs,*
- *si* $\vec{v}$ *et* $\vec{i}$ *sont de même sens alors* $v_x = \bar{v}_x = +v > 0$ *et le point* M *se déplace dans le sens des* x *positifs,*
- *si* $\vec{v}$ *et* $\vec{i}$ *sont de sens opposés alors* $v_x = \bar{v}_x = -v < 0$ *et le point* M *se déplace dans le sens des* x *négatifs,*
- *si* $\vec{a}$ *et* $\vec{i}$ *sont de même sens alors* $a_x = \bar{a}_x = +a > 0$,
- *si* $\vec{a}$ *et* $\vec{i}$ *sont de sens opposés alors* $a_x = \bar{a}_x = -a < 0$.

5.4. Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)

a) Définition

Un point M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si :

$$\vec{a} = \vec{0} \quad a_T = 0 \text{ mvt uniforme et } a_N = 0 \text{ mvt rectiligne} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cte}\ \forall t$$

D'où deux cas possibles :

- Le vecteur vitesse est nul, c'est à dire le point M est immobile,
- Le vecteur vitesse est constant, M est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

b) Équations horaires

Le mouvement étant rectiligne, $a_N = 0$ alors $\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs parallèles à la trajectoire qui est confondue avec l'axe xx'.

Par définition :

$$a_x = \frac{d}{dt} v_x = \ddot{x} = 0$$

en intégrant :

$$v_x = \frac{d}{dt} x = \dot{x} = v_0 = cte$$

avec v_0 la vitesse du point M à l'origine des temps t_0. Elle est constante tout au long du mouvement. Elle peut être positive ou négative suivant que le mouvement se fait suivant xx' ou $x'x$.

En intégrant une seconde fois :

$$x_{(t)} = v_0 t + x_0 \quad (7)$$

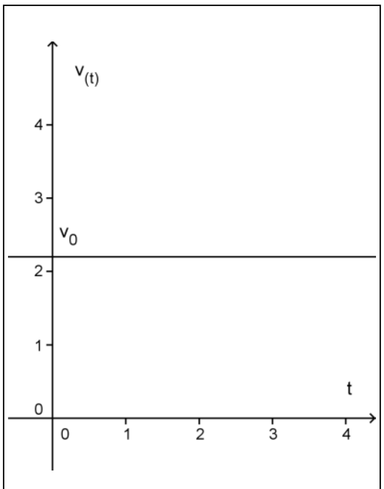


Fig. 12: Diagramme v(t)

x_0 s'appelle l'abscisse initiale, c'est à dire la position du point M à l'origine des temps t_0.

x_0 *et* v_0 forment les conditions initiales du mouvement.

Remarque :

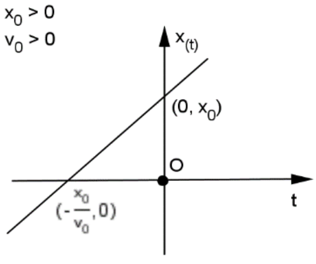
C'est le seul mouvement dont l'accélération soit nulle.

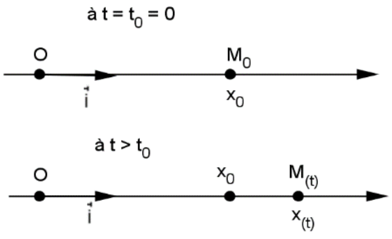
c) Diagrammes horaires $x_{(t)}$

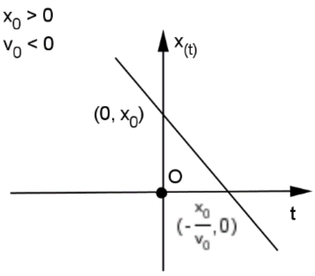
La relation (7) du paragraphe précédent montre que l'équation horaire $x_{(t)}$ est une droite d'équation :

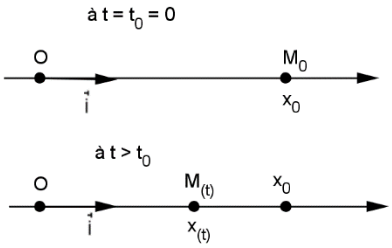
$$x_{(t)} = v_0 t + x_0$$

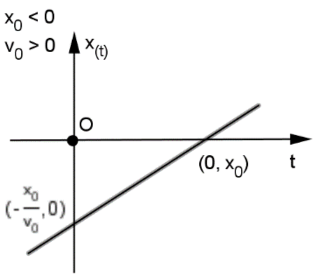
Il y a donc quatre cas possibles selon les signes de x_0 et v_0 décris par les figures ci-dessous :

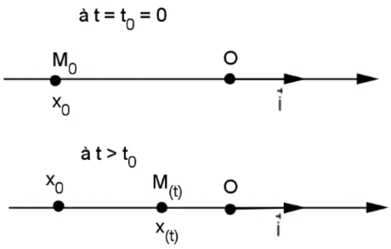


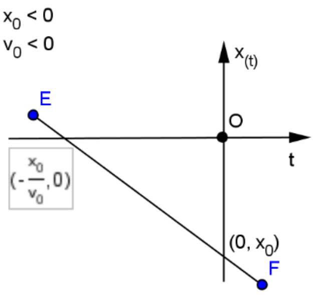


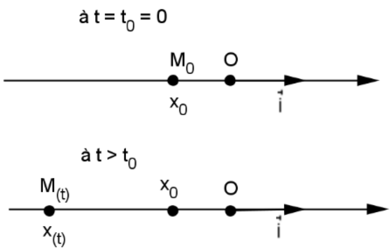












Remarques :

Dans chaque cas, il faut noter que :

- *L'expression des coordonnées des points d'intersection de la droite avec les axes sont les mêmes mais leur signe et leur valeur change en fonction de la valeur et du signe de* x_0 *et de* v_0.
- *Que la pente de la droite, c'est à dire son coefficient directeur est* v_0.

On peut retenir que le point M passe au point d'abscisse $x(t) = 0$ à l'instant $t = -\frac{x_0}{v_0}$

5.5. Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (MRUV)

a) Définition

Un point M est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si :

- $\vec{a} = \overrightarrow{cte} \neq \vec{0} \forall t$ le vecteur accélération est constant quelque soit t.
- $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont parallèles, de même direction mais pas obligatoirement de même sens.

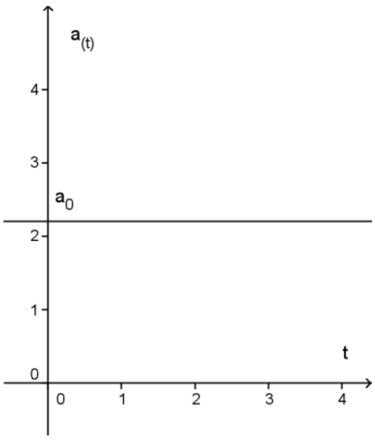


Fig. 13: Diagrammes a(t)

b) Équations horaires

Le mouvement étant rectiligne, $a_N = 0$ et $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs parallèles à la trajectoire qui est confondue avec l'axe xx'.

Par définition :

$$a_{(t)} = \frac{d}{dt} v_x = \ddot{x} = a_0 = cte$$

en intégrant :

$$v_{(t)} = \frac{d}{dt} x = \dot{x} = a_0 t + v_0$$

$$v_{(t)} = a_0 t + v_0 \qquad (8)$$

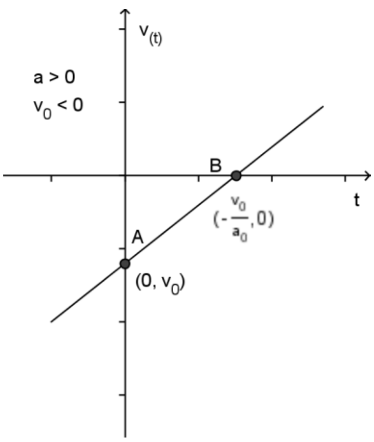


Fig. 14: Diagramme v(t)

avec v_0 la vitesse du point M à l'origine des temps t_0. Elle est constante tout au long du mouvement. Elle peut être positive ou négative suivant que le mouvement se fait suivant xx' ou $x'x$.

En intégrant une seconde fois :

$$x_{(t)} = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \qquad (9)$$

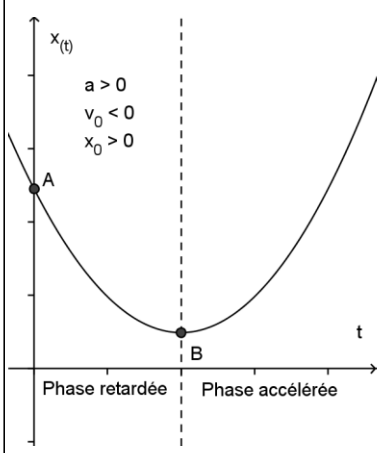


Fig. 15: Diagramme x(t)

Remarques :

L'équation horaire $x_{(t)}$ est une équation parabolique.

Si les deux phases du mouvement sont présentes alors à une position x_M du point M correspond deux dates t :

- *L'une correspondant au premier passage à la position* x_M *durant la phase retardée,*
- *L'autre correspondant au second passage à la position* x_M

durant la phase accélérée,

b.1. Interprétation des courbes

Il y a plusieurs cas dépendant des conditions initiales sur a_0, v_0 et x_0. Nous nous placerons ici dans le cas le plus général où $a_0 > 0$, $v_0 < 0$ et $x_0 > 0$.

- à $t = 0$ le point M étant en A (Fig 19).

La vitesse v_0 est négative. Le mouvement se fait donc de x vers x' (sens des x négatifs Fig 24).

- de A vers B (Fig 18)

Lorsque t augmente, le point M se déplace vers la gauche sur la trajectoire (Fig 25) et x diminue (Fig 19). La vitesse v est toujours négative mais sa norme diminue (Fig 18), c'est à dire que le point M ralentit ($\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de sens opposé). Le mouvement est donc retardé.

- en B

La norme de la vitesse diminue jusqu'à devenir nulle au point B d'abscisse $x_0 - \frac{{v_0}^2}{2a_0}$ à l'instant $t_B = -\frac{v_0}{a_0}$. Le point B s'appelle un point d'arrêt.

Un point d'arrêt est le point d'un mouvement rectiligne uniformément varié où la vitesse est nulle.

- Au delà de B

La vitesse v devient positive. Elle est alors dans le même sens que l'accélération a_0. Le mouvement devient donc accéléré. La norme de la vitesse augmente (Fig 18). Le point M repart en sens inverse (vers les x croissants) donc x augmente (Fig 19). Le point M repassera pour la $2^{ième}$ fois au point A à la date $t_C = -\frac{2v_0}{a_0}$. Le point M ne changera plus de sens. Son abscisse et sa vitesse continueront d'augmenter.

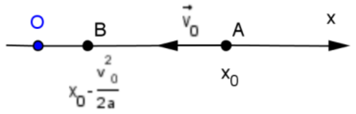


Fig. 16: Trajectoire

En résumé, deux cas sont possibles :

Si le point M démarre avec une vitesse de sens opposée à l'accélération, alors il y aura dans l'ordre :

- La phase retardée,
- Le point d'arrêt (point ou la vitesse est nulle),
- La phase accélérée.

Si dans un mouvement rectiligne uniformément varié les deux phases du mouvement existent alors elle sont séparées par un point d'arrêt.

Si le point M démarre avec une vitesse de même sens que l'accélération, alors il y aura dans l'ordre :

- le point d'arrêt ou point de départ (point ou la vitesse est nulle),
- la phase accélérée.

c) Relations entre position, vitesse et accélération

c.1. Relation entre la vitesse et le temps

D'après la relation (8) on peut déduire :

$$v_2 - v_1 = a_0(t_2 - t_1)$$

où v_1 est la vitesse d'un point M à la date t_1 et v_2 la vitesse du point M à la date t_2, le point M ayant une accélération a_0.

c.2. Relation entre la vitesse et la position

Le théorème des vitesses se déduit de l'expression (9) :

$$v_2{}^2 - v_1{}^2 = 2a_0(x_2 - x_1)$$

où v_1 est la vitesse d'un point M à la date t_1 et v_2 la vitesse du point M à la date t_2, le point M ayant une accélération a_0.

c.3. Relation entre la distance parcourue et le temps

Lorsque les positions M du solide sont repérée à des intervalles de temps θ constant comme lors d'une chronophotographie par exemple alors les distances parcourues durant les différents intervalles de temps θ forment une progression arithmétique de raison $a\theta^2$

on a donc :

$$d_{i+1} = d_i + a\theta^2$$

soit :

$$d_i = d_0 + i \cdot a\theta^2$$

avec a positif si la phase est accélérée et négatif si elle est retardée

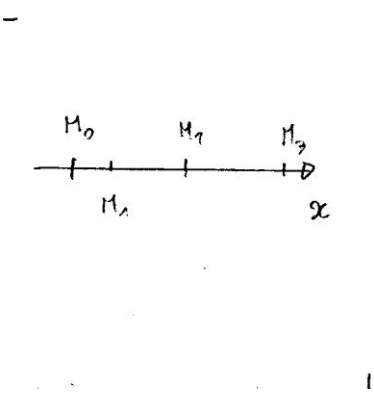


Fig. 17: Chronophotographie

5.6. Mouvement Parabolique (MP)

a) Définition

Un point M est animé d'un mouvement parabolique si :

- $\vec{a} = \overrightarrow{cte} \neq \vec{0} \forall t$ le vecteur accélération est constant quelque soit t.
- $\vec{a}$ et $\vec{v}$ ne sont pas parallèles.

b) Équations horaires

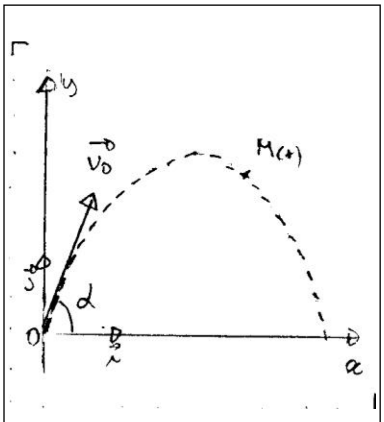


Fig. 18: Mouvement parabolique

Le vecteur accélération étant constant, il est judicieux de le prendre colinéaire à un axe du repère. La majorité des exercices ont pour accélération le champ de pesanteur. Nous nous placerons donc dans le cas où $\vec{a} = a_y\vec{J}$ et $a_y = -a$.

Dans un repère$\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$on a :

$$\vec{a}_{(t)} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -a \\ a_z = 0 \end{array} \right.$$

en intégrant une première fois on obtient les équations horaires de la vitesse :

$$\vec{v}_{(t)} \begin{array}{c} v_x = v_{xo} = v_0\cos\alpha \\ v_y = -at + v_{yo} = -at + v_o\sin\alpha \\ v_z = v_{zo} = 0 \end{array}$$

en intégrant une seconde fois on obtient les équations horaires de la position

$$\overrightarrow{OM}_{(t)} \left| \begin{array}{c} x_{(t)} = v_0\cos\alpha \cdot t + x_0 \\ y_{(t)} = -\dfrac{1}{2}at^2 + v_o\sin\alpha \cdot t + y_0 \\ z_{(t)} = z_0 = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions initiales du mouvement sont :

- x_0, y_0, z_0 la position du point M à la date t_0,
- v_{xo}, v_{yo}, v_{zo} les coordonnées du vecteur vitesse à la date t_0.

L'équation horaire $x_{(t)}$ est celle d'un MRU (cf Eqn.(7)), autrement dit :

Dans un mouvement parabolique, la projection du point M sur l'axe xx' est animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse constante$v_0\cos\alpha$

L'équation horaire $y_{(t)}$ est celle d'un MRUV (cf Eqn.(8)), autrement dit :

Dans un mouvement parabolique, la projection du point M sur l'axe xx' est animée d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération constante a.

Remarque :

Les coordonnées de l'accélération, de la vitesse et de la position sur l'axe z sont nulles donc le mouvement parabolique est un mouvement plan.

c) Équation de la trajectoire

Si l'on se place dans le cas le plus courant ou $x_0 = 0$, on a :

$$x_{(t)} = v_0\cos\alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x_{(t)}}{v_0\cos\alpha}$$

en reportant dans l'équation

$$y_{(t)} = -\frac{1}{2}at^2 + v_o \sin\alpha \cdot t + y_0$$

on obtient :

$$y_{(x)} = \frac{-a}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha \cdot x + y_0$$

Cette équation est l'équation d'une parabole (cf. équation (1)), donc la trajectoire est parabolique.